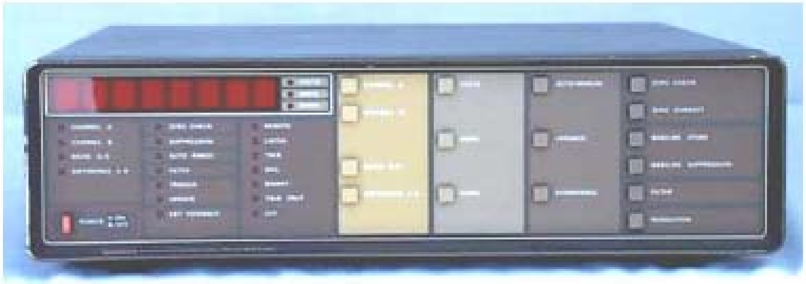


Corsi abilitanti speciali

Fisica Classica III

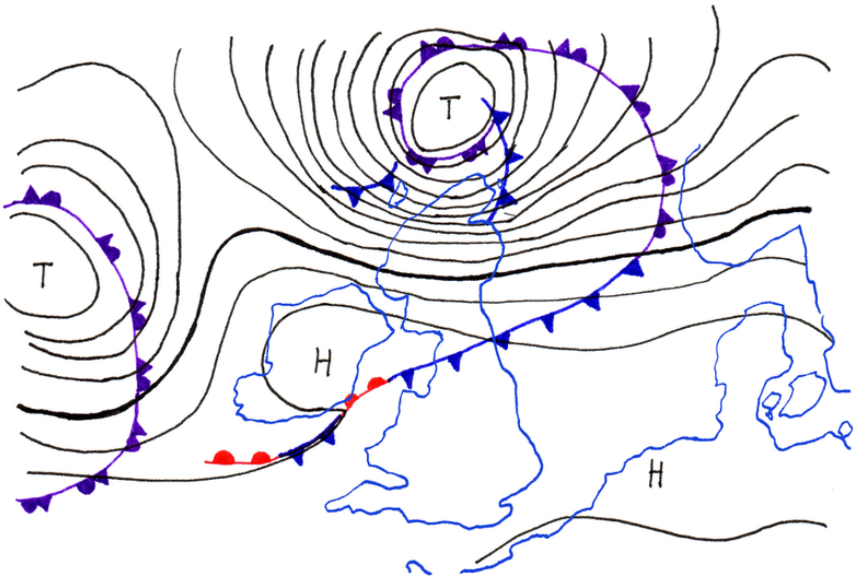
Corsista Antonio Santoro

Applicazione di strumenti matematici avanzati allo studio del campo elettrostatico in presenza di conduttori

Strumenti matematici

Campi scalari e campi vettoriali

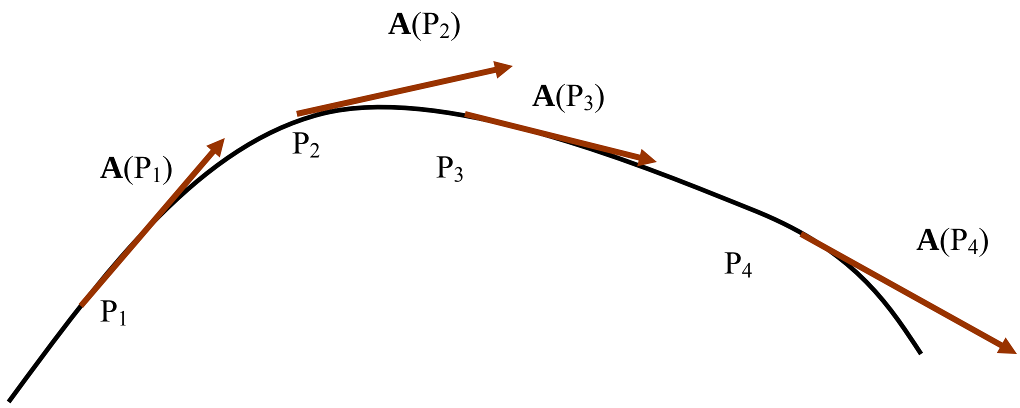
Consideriamo il normale spazio tridimensionale (o euclideo) e una regione o dominio di questo spazio che chiameremo Ω. Consideriamo ora una funzione definita in Ω, U(P) che associa d ogni punto P di Ω una grandezza scalare U(P): tale funzione definisce un *campo scalare.* Un esempio di campo scalare può essere la rappresentazione su di una carta geografica dei valori di pressione atmosferica in funzione delle coordinate geografiche.



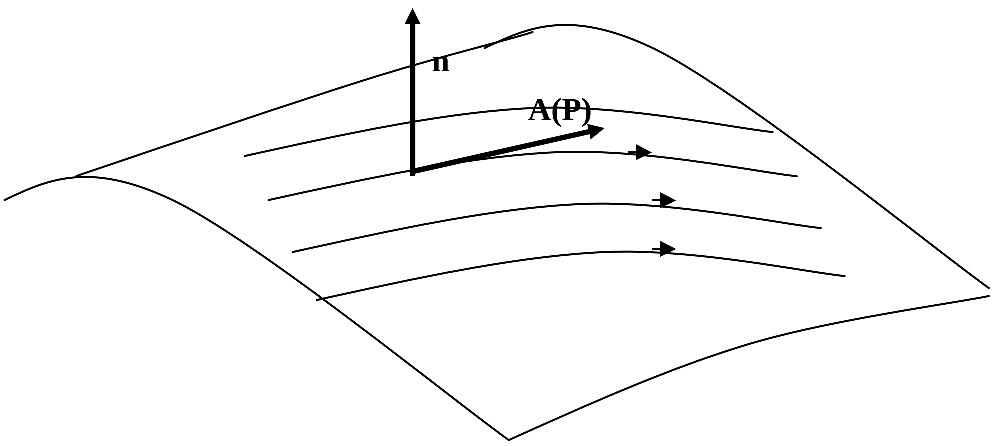
La struttura di un campo scalare può essere rappresentata geometricamente mediante le *superfici di livello.* Una superficie di livello è l'insieme dei punti dello spazio tridimensionale in cui U(P) assume un valore costante. Tornando al nostro esempio , è chiaro che in uno spazio bidimensionale una superficie diventa una *linea di livello,* come le isobare di figura.

Sia definita ora una funzione **A** che associ ad ogni punto P di Ω una grandezza vettoriale **A(P).** si dice che in Ω è definito un *campo vettoriale.*

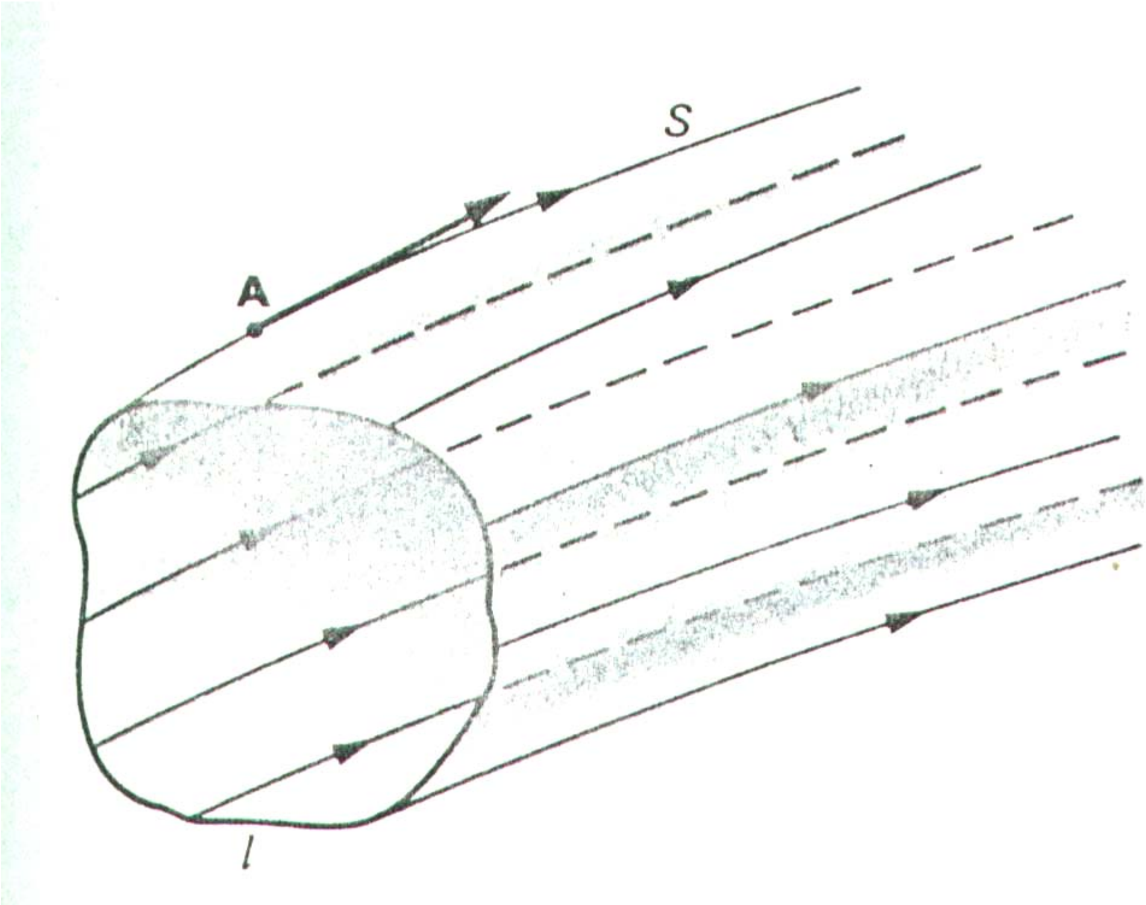
Un campo vettoriale può essere rappresentato mediante *linee vettoriali.* Una linea vettoriale è una linea che sia tangente in ogni punto al vettore **A(P).**



Una superficie S è una superficie vettoriale del campo vettoriale **A**(P) se, in ogni suo punto P, la normale **n** alla superficie è ortogonale a **A**(P).



Definiamo invece *tubo di flusso* una superficie vettoriale tubolare costituita dall'insieme delle linee vettoriali che passanti per una linea chiusa l non coincidente con alcuna linea vettoriale



Gradiente di un campo scalare

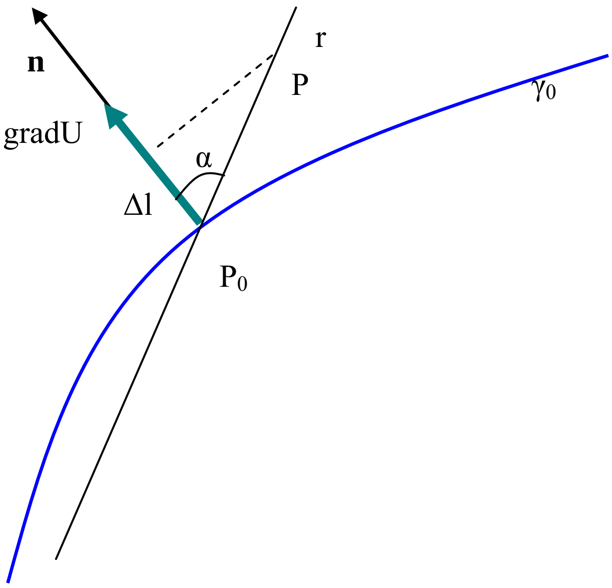
Dato un campo scalare U(P) vogliamo studiarne il comportamento intorno ad un punto generico P_o . Per fare questo consideriamo una retta orientata r che passi per P_o e consideriamo il rapporto incrementale

$$R(P,P_o)=\frac{U(P)-U(P_O)}{d(P,P_O)}$$

Si definisce derivata direzionale di U nel punto P_O il limite

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{P_O}=\lim_{d(P,P_O)\to 0}\frac{U(P)-U(P_O)}{d(P,P_O)}$$

Consideriamo ora una superficie di livello passante per il punto P_0 e un vettore avente direzione e verso coincidenti con la normale alla superficie nel punto P_0 e modulo pari alla derivata direzionale di U(P) secondo la direzione della normale. Tale grandezza vettoriale rappresenta il *gradiente di U o gradU. Possiamo anche dire che gradU è un operatore che trasforma un campo scalare in un campo vettoriale. Esso ci informa su come varia la grandezza U(P) nelle varie direzioni dello spazio in cui è definita.-*
Supponiamo, infatti di conoscere gradU e di voler calcolare la derivata direzionale di U in una generica direzione r diversa dalla normale alle superfici di livello



Per determinare la derivata direzionale lungo la direzione di r costruiamo il rapporto incrementale

$$R = \frac{\Delta U}{d(P, P_0)}$$

Dalla figura vediamo che $\Delta l = d(P, P_0)\cos\alpha$ per cui

$\dfrac{\Delta U}{d(P, P_0)} = \dfrac{\Delta U}{\Delta l}\cos\alpha$ per cui passando al limite per $d(P, P_0) \longrightarrow 0$ si ha

$\dfrac{\partial U}{\partial r} = |gradU|\cos\alpha$ o anche $\dfrac{\partial U}{\partial r} = gradU \bullet i_r$ dove i_r rappresenta il versore che indica la direzione della retta r.

Appare evidente che, in un sistema di rappresentazione in coordinate cartesiane si ha

$$(gradU)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(gradU)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(gradU)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Campi che ammettono un potenziale

Un campo vettoriale **A**(P) ammette un potenziale nel suo dominio di definizione se in tale dominio possiamo definire un campo scalare U tale che

A = gradU

U sarà allora il potenziale di A. Si noti che il potenziale di A può essere definito a meno di una costante. Infatti, per le proprietà di linearità dell'operatore gradiente, considerata la funzione scalare

V(P) = U (P) +costante si ha

gradV(P)=gradU+0

per cui

A = gradV = gradU

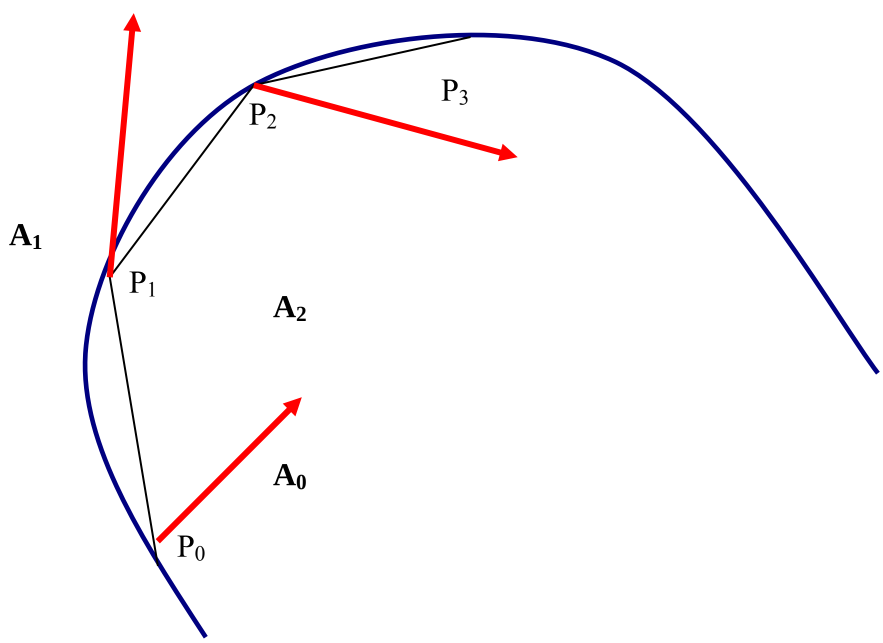
Integrale di linea di un campo vettoriale lungo una linea orientata

consideriamo un campo **A** e una curva regolare γ definita nel dominio del campo **A** di estremi M ed N. La curva viene orientata scegliendo un verso di percorrenza su di essa ad esempio da M ad N. Suddividiamo la curva mediante vari punti P_0, P_1, ...P_n. In corrispondenza di questi punti consideriamo i valori che assume il campo $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$,... $\mathbf{A_n}$. Consideriamo poi i prodotti scalari

$\mathbf{A_k} \bullet \mathbf{l_k}$

e la sommatoria

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} A_k \bullet I_k$$



Consideriamo ora la successione dei valori assunti dalla sommatoria al crescere del numero dei punti in cui suddividiamo la curva. Se la successione tende ad un limite per n che tende ad infinito tale limite si dice integrale di linea del campo vettoriale

$$T_\gamma = \lim_{n \to \infty} T_n = \int_\gamma A \bullet dl$$

Se l'integrale viene applicato ad una linea chiusa si parla di circuitazione di **A** lungo la linea

$$C_\gamma = \oint_\gamma A \bullet dl$$

Date due curve γ e γ' che abbiano gli stessi estremi M ed N gli integrali

$$T_\gamma = \int_\gamma A \bullet dl$$

e

$$T_{\gamma'} = \int_{\gamma'} A \bullet dl$$

sono in generale diversi fra loro. Godono della proprietà di avere integrali di linea indipendenti dalla curva e dipendenti dai soli estremi di integrazione solo i campi che ammettono un potenziale.

Infatti se **A** = gradU si ha

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} i_x + \frac{\partial U}{\partial y} i_y + \frac{\partial U}{\partial z} i_z$$

mentre

$$dl = dx i_x + dy i_y + dz i_z$$

per cui

$$A \bullet dl = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

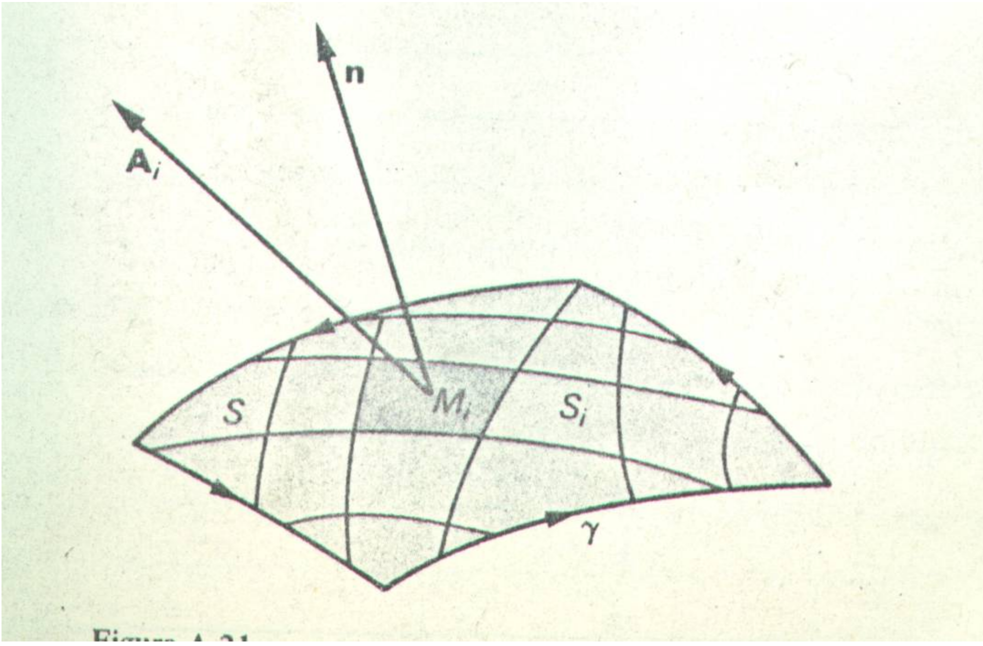
Per cui

$$T_{\gamma'} = \int_{\gamma'} A \bullet dl = \int_{\gamma'} dU = U(N) - U(M)$$

Ne discende che la circuitazione è nulla

$$C_\gamma = \oint_\gamma A \bullet dl = 0$$

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie



Consideriamo un campo vettoriale **A** definito in una regione **Ω** e sia S una superficie regolare non chiusa contenuta in Ω. Sia poi γ la curva chiusa orientata in modo che il verso di percorrenza sulla curva e la normale alla superficie siano legati dalla regola della mano destra. Suddividiamo S in n parti S_1, S_2, S_3, … S_N, in maniera arbitraria con aree σ_1, σ_2, σ_3,… σ_n. Consideriamo su ogni superficie un punto M_i e il valore assunto da **A** in ognuno di questi punti. Detto $\mathbf{n}_j$ il vettore normale alla superficie S_j nel punto M_j consideriamo la sommatoria

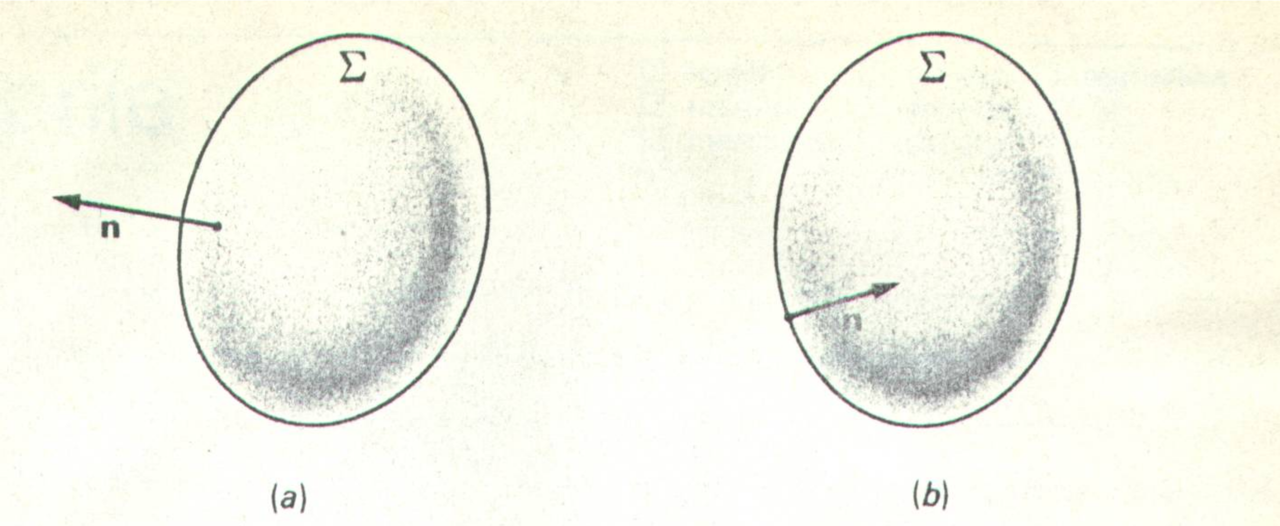
$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \bullet n_k \sigma_k = \sum_{k=1}^{n} A_{kn} \sigma_k$$

Consideriamo la successione di valori assunti dalla sommatoria al crescere del numero n delle parti. Se esiste il limite per n che tende ad infinito della successione esso prende il nome di flusso di **A** attraverso la superficie S

$$\Phi_S = \lim_{n \to \infty} \Phi_n = \iint_S A \bullet n dS = \iint_S A_n dS$$

Per il modo in cui è definito, il segno del flusso dipende dall'orientazione scelta per la normale alla superficie S.

La nozione di flusso può essere estesa ad una superficie chiusa . In tal caso, a seconda del verso della normale potremo parlare di *flusso entrante o flusso uscente.*

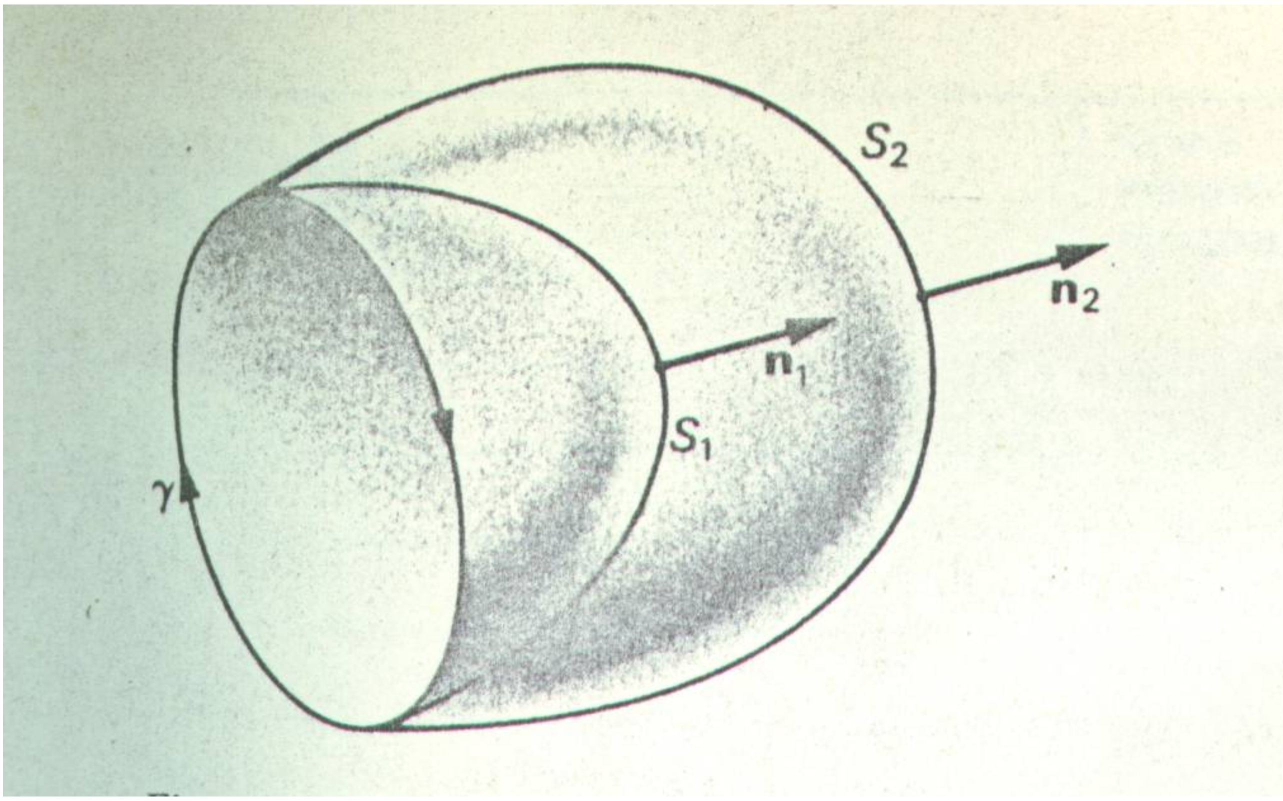


Tali espressioni non si riferiscono quindi alla reale direzione delle linee di flusso rispetto alla superficie ma soltanto al modo in cui è stata arbitrariamente orientata la normale alla superficie.

Un campo si dice conservativo per il flusso se vale la relazione

$$\iint_S A \bullet n dS = 0$$

La proprietà di conservazione del flusso si può esprimere anche alternativamente dicendo che se S_1 ed S_2 sono due superfici orlate da una stessa linea chiusa γ, orientate entrambe in maniera congruente rispetto all'orientamento della curva.



Consideriamo ora la superficie chiusa ottenuta dall'unione di S_1 e S_2. Si ha allora

$$\Phi_S = \iint_S A \bullet n dS = \iint_{S_1} A \bullet n_1 dS + \iint_{S_2} A \bullet (-n_2) dS = \iint_{S_1} A \bullet n_1 dS - \iint_{S_2} A \bullet n_2 dS \Rightarrow \iint_{S_1} A \bullet n_1 dS = \iint_{S_2} A \bullet n_2 dS$$

Quindi la conservazione del flusso comporta che sia costante il flusso attraverso superfici diverse non chiuse, orlate dalla stessa curva per cui si può parlare di flusso associato alla curva.

Divergenza di un campo vettoriale

Consideriamo ora un campo vettoriale **A** e un dominio spaziale τ appartenente al dominio spaziale di definizione Ω e limitato da una superficie chiusa regolare Σ. Si consideri il rapporto fra il flusso del campo attraverso la superficie e il volume di τ

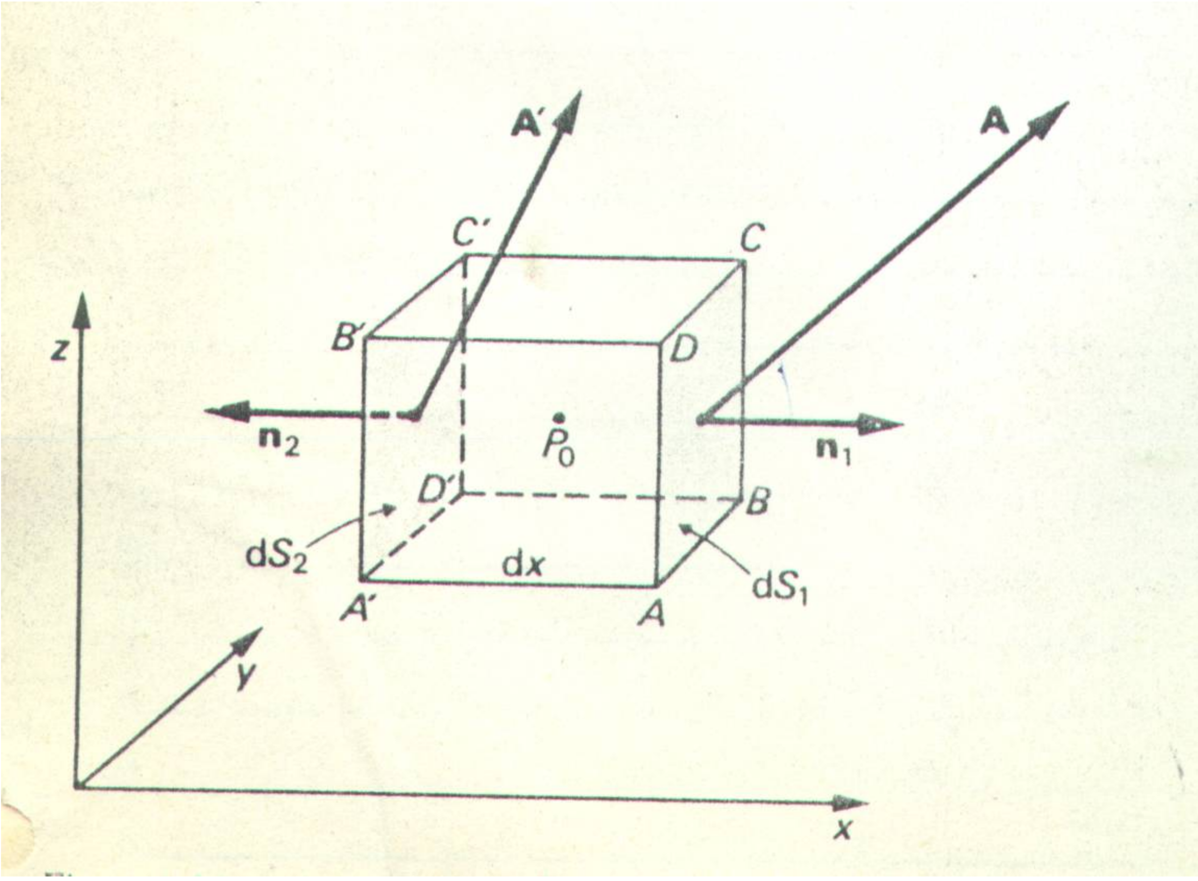
$$\frac{\Phi_\Sigma}{V(\tau)} = \frac{\iint_\Sigma A \bullet n dS}{V(\tau)}$$

Consideriamo il limite di tale rapporto quando facciamo restringere il volume intorno ad un punto P_o. Se questo limite esiste ed è finito, indipendente dalla superficie chiusa abbiamo una nuova grandezza

$$div_{P_o} = \lim_{V(\tau) \to 0} \frac{\iint_\Sigma A \bullet n dS}{V(\tau)}$$

che chiamiamo divergenza del campo vettoriale nel punto $P_{o.}$ Possiamo dire che la divergenza è un operatore che associa ad un campo vettoriale **A** un campo scalare (la divergenza di A).

E' facile calcolare la espressione della divergenza in coordinate cartesiane. Consideriamo un volume cubico incentrato intorno al punto P_o come in figura



Considerata la faccia ABCD orientata verso l'esterno si ha

$$d\Phi_1 = A \bullet n_1 dS = A_x dS$$

Mentre per la faccia posteriore A'B'C'D' si ha

$$d\Phi_2 = A' \bullet n_2 dS = -A'_x \, dS$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore si ha

$$A'_x = A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$$

per cui

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dS = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV$$

Facendo un ragionamento analogo per tutte le facce possiamo scrivere

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV \Rightarrow divA = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

Teorema della divergenza o di Gauss-Ostrogradskij

Sia A un campo vettoriale definito in una regione di spazio Ω, limitata da una superficie chiusa Σ; se in ogni punto di Ω è definita la divergenza di A si ha

$$\iiint_{\Omega} divA\,d\tau = \iint_{\Sigma} A \bullet n\,dS$$

Data la definizione di campo conservativo per il flusso si ha che per tali campi risulta in base al teorema della divergenza

divA=0.

Un campo che verifica tale relazione in ogni punto del suo dominio è detto anche solenoidale.

L'operatore divergenza è lineare

div(A+B)=divA+divB

div(aA)=adivA

con a costante scalare arbitraria.

Rotore di un campo vettoriale

Consideriamo un campo vettoriale **A** definito in una regione dello spazio Ω, e sia P un punto di tale regione. Consideriamo una superficie qualsiasi S passante per P e γ la curva chiusa che la orla.

Consideriamo il rapporto

$$R = \frac{\oint_{\gamma} A \bullet t\,dl}{A(S)}$$

Immaginiamo di restringere la superficie S intorno al punto P in modo da lasciare inalterato l'orientamento n della normale alla superficie. Se esiste il limite del rapporto

$$R_n = \lim_{A(S) \to 0} R = \lim_{A(S) \to 0} \frac{\oint_{\gamma} A \bullet t\,dl}{A(S)}$$

ed è indipendente dalla direzione n, esso prende il nome di rotore del campo vettoriale **A** nel punto P. Il rotore può essere visto come un operatore che associa ad ogni campo A un altro campo rotA.

Teorema di Stokes

Sia A un campo vettoriale definito in una regione dello spazio Ω e sia γ una linea chiusa contenuta in Ω; detta S una superficie qualsiasi orlata da γ, se in tutti i punti di S è definibile il rotore di A si ha

$$\oint_{\gamma} A \bullet t\,dl = \iint_{S} rotA \bullet n\,dS$$

Per i campi che ammettono potenziale

$\oint_{\gamma} A \bullet tdl = 0 \Rightarrow \iint_S rotA \bullet ndS = 0 \Rightarrow rotA = 0$ per l'arbitrarietà di S per cui un campo che ammette potenziale è anche irrotazionale.

Il potenziale vettore

Si può dimostrare che se un campo è solenoidale (div**A**=0) esso si può esprimere come rotore di un campo vettoriale **U. U** viene detto potenziale vettore di **A.**

Poiché, per definizione, un campo vettoriale che ammette un potenziale scalare Φ ha circuitazione nulla e quindi risulta irrotazionale, cioè rot grad Φ = 0, si ha che, considerato

V = **U** + grad Φ

rot V=rotU+0

Per cui un potenziale vettore è definito a meno del gradiente di un arbitrario potenziale scalare.

Integrali multipli impropri

Diamo alcune nozioni elementari sugli integrali multipli impropri estesi a regioni limitate.

Consideriamo una funzione f(x,y,z) definita in un dominio limitato Ω dello spazio tridimensionale, e supponiamo che essa sia illimitata in ogni intorno ω_δ di un punto P_0 appartenente ad Ω. Supponiamo che f sia limitata ed integrabile in ogni dominio Ω-ω_δ . Si definisce integrale improprio della f in Ω il limite

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\delta \to 0} \iiint_{\Omega-\omega_\delta} f(x,y,z)dxdydz$$

Se questo limite esiste, è finito ed è indipendente dal modo in cui si restringe il dominio ω_δ l'integrale improprio si dice convergente.

In alcuni casi tale limite non esiste in generale ma esiste ed è finito quando riconsiderino domini ω_δ costituiti da sfere concentriche al punto $P_{0.}$ In tal caso il limite prende il nome di valore principale secondo Cauchy dell'integrale improprio.

Teorema. Considerata una successione arbitraria Σ_n di sfere di diametro via via decrescente centrate in P_0, condizione necessaria e sufficiente per la convergenza dell'integrale improprio è che la successione

$$\iiint_{\Omega-\Sigma_1} f(x,y,z)dxdydz, \iiint_{\Omega-\Sigma 2} f(x,y,z)dxdydz, ... \iiint_{\Omega-\Sigma n} f(x,y,z)dxdydz$$

risulti limitata.

Possiamo utilizzare tale risultato per dimostrare in particolare che data la funzione

$f(x,y,z)=\frac{c}{r^{\alpha}}$ con c>0 e $r=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{1/2}$

l'integrale $\iiint_{\Omega}\frac{c}{r^{\alpha}}dxdydz$ esteso ad una sfera centrata intorno a P_0 è convergente per $\alpha<3$ e divergente per $\alpha\geq 3$. A tal fine consideriamo una successione di sfere Σ_n di sfere di diametro via via decrescente centrate in P_0 e gli integrali

$$\iiint_{\Omega-\Sigma_n}\frac{c}{r^{\alpha}}dxdydz$$

Se scegliamo un sistema di coordinate sferiche centrate in a P_0 abbiamo

$$\iiint_{\Omega-\Sigma_n}\frac{c}{r^{\alpha}}dxdydz=\iiint_{\Omega-\Sigma_n}\frac{c}{r^{\alpha}}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{\delta_n}^{R}\frac{c}{r^{\alpha}}r^2dr=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{4\pi c}{3-\alpha}\left[R^{(3-\alpha)}-\delta_n^{(3-\alpha)}\right]---per---\alpha\neq 3\\ 4\pi c\ln\frac{R}{\delta_n}---per---\alpha=3\end{array}\right.$$

Quindi la successione degli integrali sarà limitata per $\alpha<3$ e illimitata per $\alpha\geq 3$.

L'operatore laplaciano

Si definisce come operatore laplaciano

$$\nabla^2 U = divgradU$$

In coordinate cartesiane

$$\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Introdotto l'operatore nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

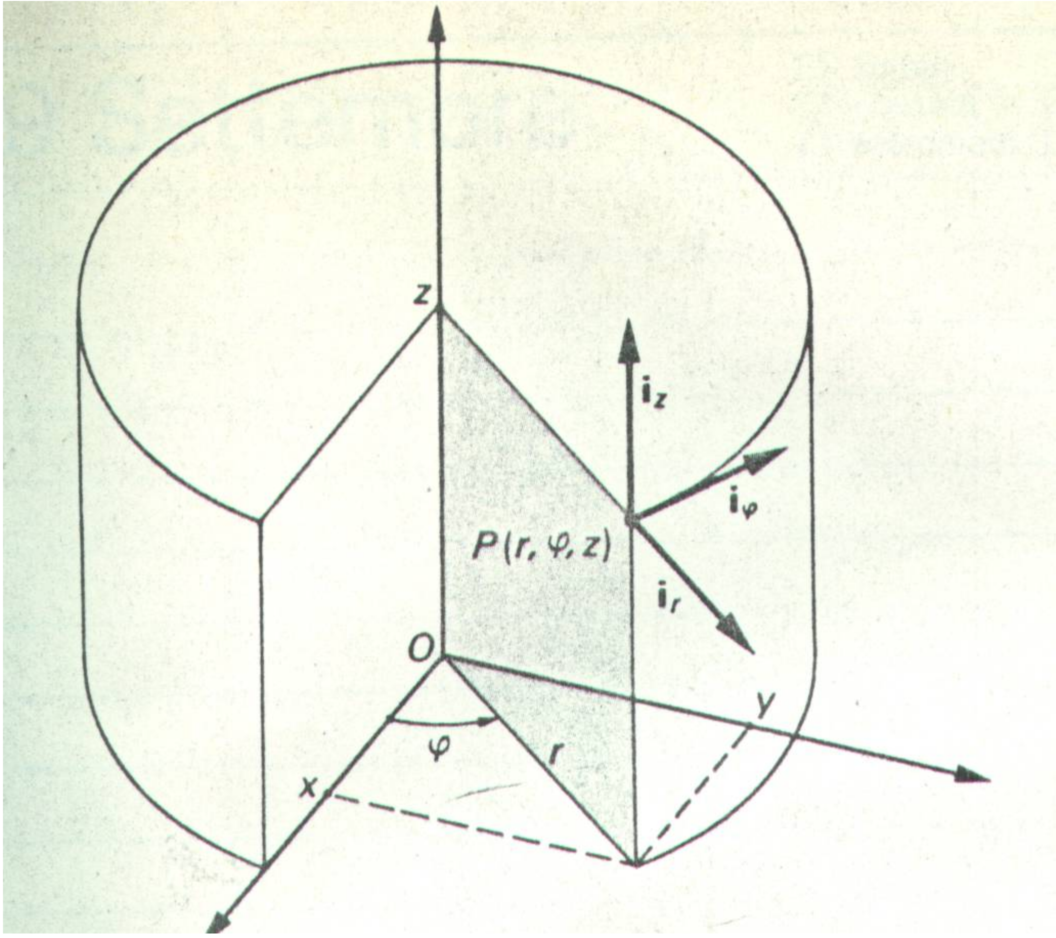
con i, j e k versori degli assi coordinati, si ha

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) U = gradU$$

e

$$\nabla^2 U = \nabla \bullet \nabla U = divgradU$$

Coordinate cilindriche



In un sistema di coordinate cilindriche un punto è individuato dalla lunghezza del raggio r congiungente l'origine degli assi e la proiezione del punto sull'asse xy, dall'angolo φ individuato dall'asse x e dal raggio congiungente l'origine degli assi e la proiezione del punto sull'asse xy, e dalla quota z.

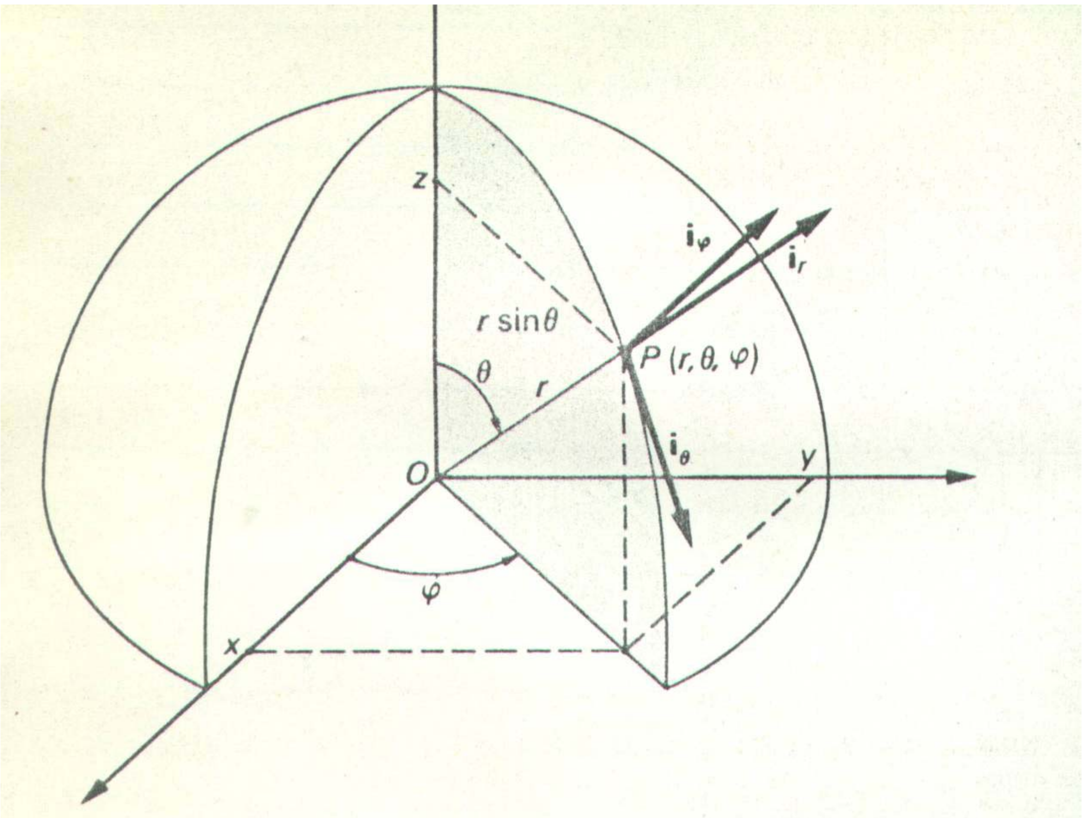
Chiaramente il legame con le coordinate cartesiane è dato dalle seguenti relazioni

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

Coordinate sferiche



In un sistema di coordinate sferiche il punto P è individuato dal raggio r che congiunge l'origine degli assi con il punto, dall'angolo φ formato con l'asse x dalla proiezione di r sul piano xy e dall'angolo θ formato da r con l'asse z

Si ha

X=rsinθcosφ

Y=sinθsin φ

Z=rcosθ

Espressione degli operatori vettoriali in diversi sistemi di coordinate

Gradiente

Coordinate cartesiane

$$(gradU)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(gradU)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(gradU)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche

$$(gradU)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(gradU)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$(gradU)_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Coordinate sferiche

$$(gradU)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(gradU)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$(gradU)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Divergenza

Coordinate cartesiane

$$divA = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche

$$divA = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordinate sferiche

$$divA = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial z}$$

Rotore

Coordinate cartesiane

$$(rotA)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(rotA)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(rotA)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Coordinate cilindriche

$$(rotA)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$(rotA)_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]$$

$$(rotA)_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Coordinate sferiche

$$(rotA)_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]$$

$$(rotA)_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (A_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi \sin\theta)}{\partial r}\right]$$

$$(rotA)_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

Laplaciano scalare

Coordinate cartesiane

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right]$$

Funzioni armoniche

Una funzione scalare V, continua insieme con le sue derivate prime e dotata di derivate seconde limitate in un dominio spaziale Ω, si dice armonica se verifica l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = divgradV = 0$$

Teorema del massimo

Una funzione armonica in un dominio limitato e continua anche sulla frontiera di esso non può essere massima in alcun punto interno del dominio

Teorema del minimo

Una funzione armonica in un dominio limitato e continua anche sulla frontiera di esso non può essere minima in alcun punto interno del dominio

Primo teorema di unicità

Se di una funzione V armonica in un dominio limitato e ivi continua fin sulla frontiera, si assegnano i valori su tutti i punti della frontiera, V è univocamente determinata nel dominio

Secondo teorema di unicità

Se di una funzione V armonica in un dominio limitato e ivi continua fin sulla frontiera, si assegnano i valori della derivata normale su tutti i punti della frontiera, V è univocamente determinata nel dominio a meno di una costante additiva arbitraria

Problema di Dirichlet interno

Determinare una funzione V, armonica in un dominio limitato e ivi continua fin sulla frontiera, quando siano assegnati i valori di V sulla frontiera.

Problema di Dirichlet esterno

Determinare una funzione V, armonica in un dominio illimitato costituito dalla regione spaziale esterna ad una superficie chiusa S, e ivi continua fin sulla frontiera, quando siano assegnati i valori di V sulla frontiera e la V sia regolare all'infinito (cioè $\forall \varepsilon > 0, \exists S' : |V| < \varepsilon$)

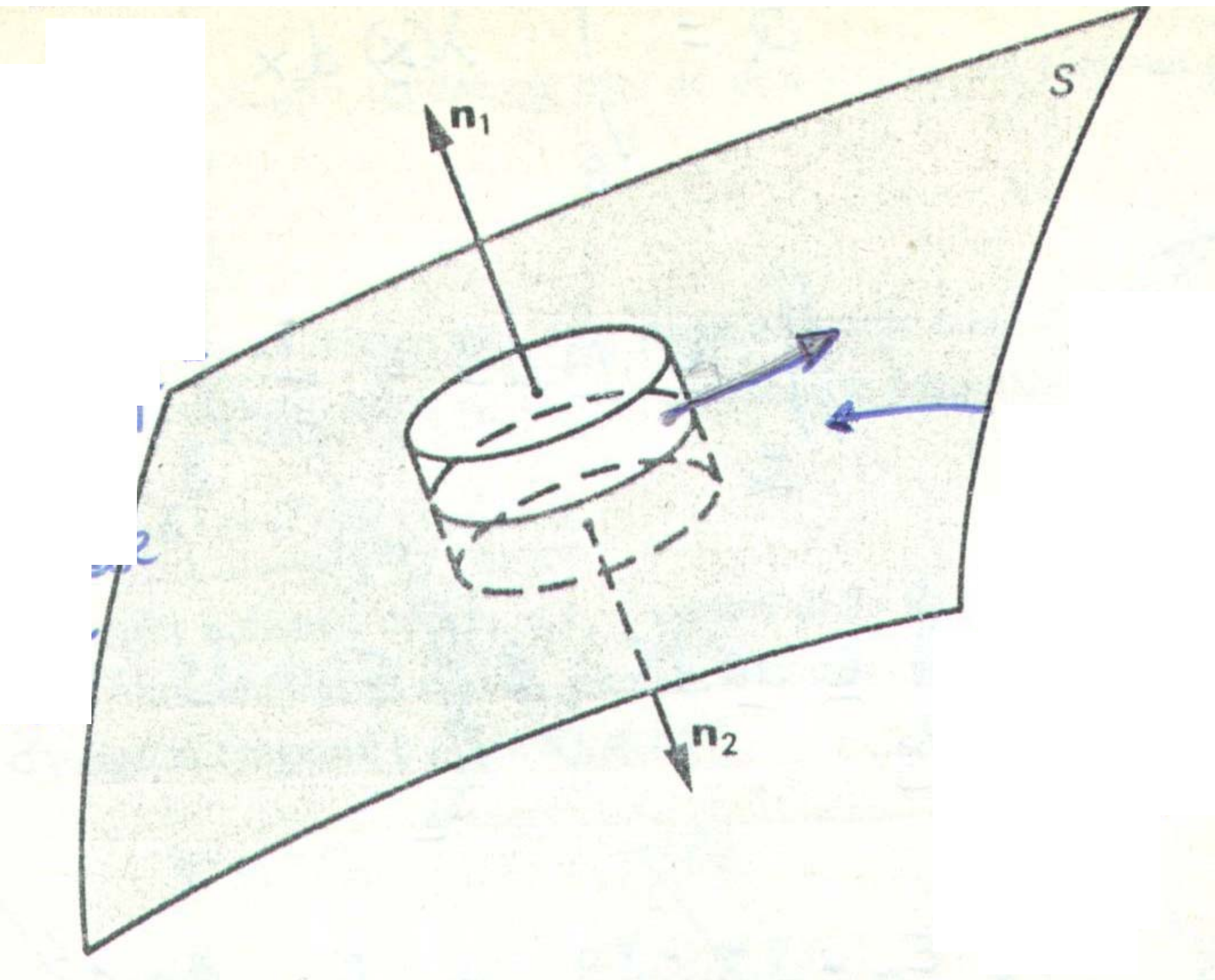
Il campo elettrostatico in presenza di conduttori nel vuoto

Equilibrio elettrostatico in conduttori omogenei

Un conduttore è in equilibrio elettrostatico quando in esso non vi è alcun moto macroscopico di cariche. Ciò significa che il campo elettrico macroscopico deve essere nullo in tutti i punti interni del conduttore.
Uno stato di equilibrio deve sempre essere raggiunto altrimenti le cariche continuerebbero a muoversi indefinitamente nel conduttore cedendo energia cinetica per urto al reticolo cristallino e ciò non è possibile essendo il campo elettrostatico irrotazionale e quindi conservativo per il lavoro.

In un conduttore normale , posto a temperatura ambiente , una volta innescato un movimento macroscopico di elettroni , si raggiunge rapidamente una situazione di equilibrio in un tempo detto tempo di rilassamento che è dell'ordine di 10^{-18}-10^{-19} secondi.

Dal punto di vista macroscopico, dunque, un corpo conduttore in equilibrio elettrostatico si presenta come una regione di spazio nel cui interno deve essere **E**=0. Di conseguenza per il teorema di Gauss espresso in forma locale deve essere ρ=0, per cui nei punti interni del conduttore non possono essere localizzate cariche. Sulla superficie esterna del conduttore, esiste una barriera di potenziale che impedisce alle cariche di abbandonare il copro, ed esse si distribuiranno in modo da dare un campo complessivo nullo all'interno del conduttore.



Ora dato il teorema di Gauss in forma locale

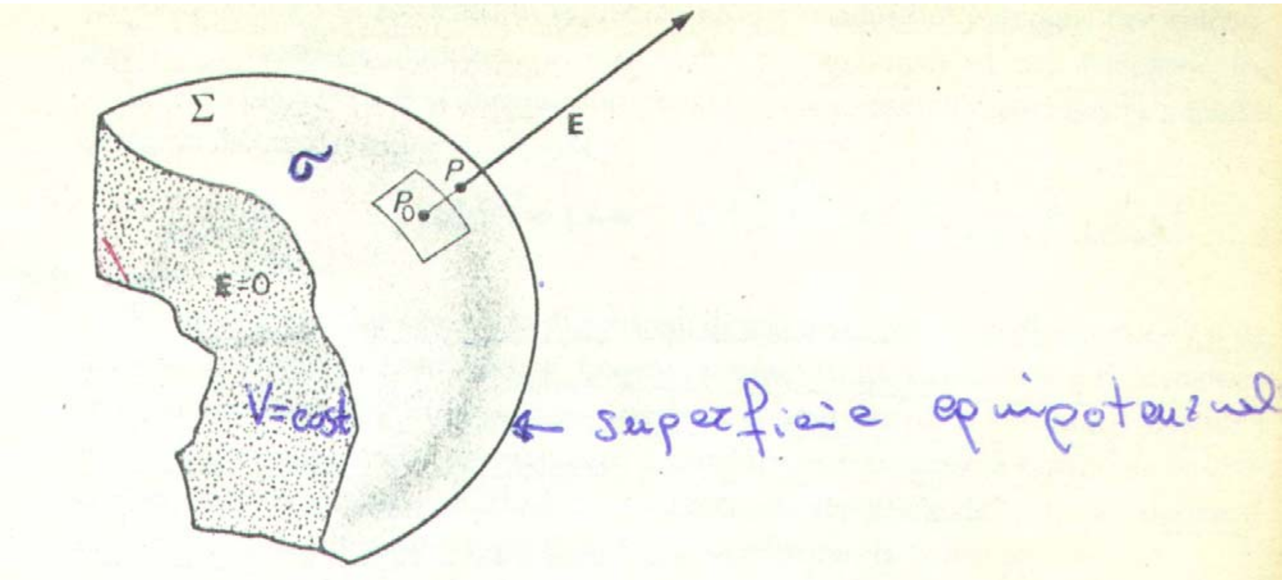
$$divE = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

e considerando il cilindretto di figura precedente, trascurando il contributo al flusso della superficie laterale del cilindro si ha

$$E_1 \bullet n_1 dS + E_2 \bullet n_2 dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma dS \Rightarrow E_{n1} - E_{n2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

Quindi nei punti in cui sia presente una carica con densità superficiale σ, il campo presenta una discontinuità nella componente normale di **E** in corrispondenza della superficie. In particolare nel caso di un conduttore, per la nullità del campo all'interno si ha che all'esterno del conduttore, quale che si ala sua forma, la componente normale del campo elettrico è

$$\lim_{P \to P_{0(dall'esterno)}} E(P) = \frac{\sigma(P_0)}{\varepsilon_0}$$



Possiamo raggiungere lo stesso risultato anche considerazioni di natura diversa.

Infatti in base alle considerazioni fatte nel paragrafo relativo agli integrali impropri possiamo dimostrare che il potenziale elettrostatico è definito e continuo anche in tutti i punti interni ad una generica distribuzione volumetrica o superficiale di cariche elettriche.

Ora all'interno del conduttore, essendo **E**=-gradV, deve risultare grad(V(P))=0 e quindi V costante. Per la sua continuità anche in corrispondenza delle cariche superficiali si ha che V è costante anche sulla superficie. Ne deriva che il campo è ad essa normale

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

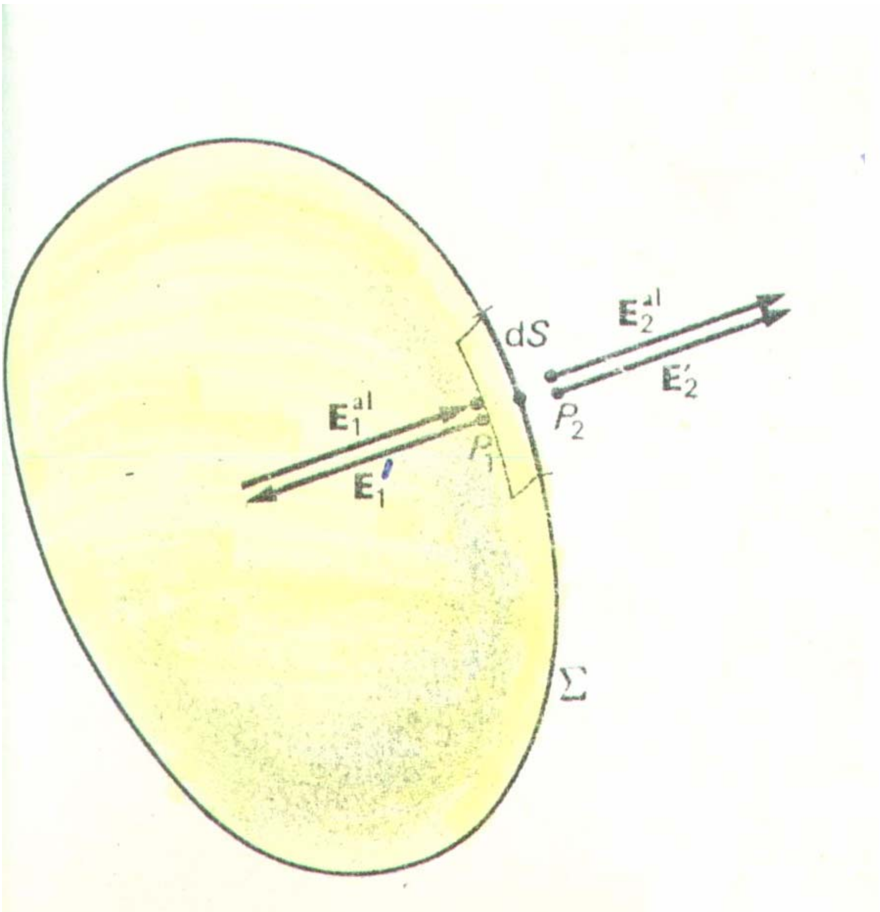
Pressione elettrostatica

Dato un conduttore carico , supponiamo di conoscere la distribuzione della densità di carica superficiale σ sulla superficie. Considerato un generico punto P della superficie vogliamo valutare la forza agente sulla carica elementare σdS. Poiché sappiamo che $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ saremmo tentati di concludere che la forza è

$$dF = E\sigma dS = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} dS \text{ .}$$

In realtà la forza è pari esattamente alla metà di questo valore. Infatti per calcolarla in modo corretto dobbiamo considerare non il campo totale ma il campo generato da tutte le cariche tranne l'elementino di carica σdS.

Per determinarlo consideriamo la figura seguente in cui sono individuati due punti P_1 e P_2 immediatamente vicini al punto P della superficie, rispettivamente all'interno e all'esterno del conduttore.



Chiamiamo $\mathbf{E_1}^{\mathbf{altri}}$ e $\mathbf{E_2}^{\mathbf{altri}}$ i campi nei due punti generati da tutte le cariche escluso l'elementino σdS e $\mathbf{E_1}'$ e $\mathbf{E_2}'$ i campi generati da σdS. Deve essere $\mathbf{E_1}^{\mathbf{altri}} + \mathbf{E_1}' = 0$ all'interno e $\mathbf{E_1}^{\mathbf{altri}} + \mathbf{E_1}' = \sigma/\varepsilon_0 \mathbf{n}$. Se sommiamo membro a membro le due relazioni e teniamo presente che $\mathbf{E_1}'$ e $\mathbf{E_2}'$ sono uguali ed opposti (campo generato da uno strato piano di cariche) mentre $\mathbf{E_1}^{\mathbf{altri}}$ e $\mathbf{E_2}^{\mathbf{altri}}$ sono praticamente identici. Per cui sommando membro a membro si ha

$$2E^{altri} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n \Rightarrow E^{altri} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} n \Rightarrow dF = \sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} n = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dSn$$

Tale forza è perpendicolare alla superficie , diretta verso l'esterno e proporzionale all'area dell'elemento. Si parla di pressione elettrostatica $p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Calcolo del campo in presenza di conduttori

Consideriamo un conduttore a cui sia conferita una carica finita Q la quale si distribuirà sulla superficie con una densità superficiale σ in modo da ottenere un campo nullo all'interno del conduttore. Se indichiamo con Γ il volume interno al conduttore, Ω il volume esterno al conduttore e Σ la superficie del conduttore il nostro scopo è di determinare una funzione potenziale V che goda delle seguenti proprietà

- *È continua in tutti i punti interni di Ω e sulla frontiera Σ (abbiamo visto infatti che il potenziale è continuo anche in presenza di distribuzioni superficiali di carica)*
- *Soddisfa l'equazione di Laplace* $\nabla^2 V = 0$ *in tutti i punti di Ω per assenza di cariche nello spazio esterno al conduttore*
- *Assume valore costante in tutti i punti di Γ e di Σ*
- *Verifica la condizione* $-\iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$
- *Verifica la condizione* $\lim_{P \to \infty} V(P) = 0$. *Questa ultima condizione deriva dal fatto che la distribuzione di cariche è tutta al finito. Questa ultima condizione va considerata come condizione di regolarità all'infinito nel senso che, comunque considerato un valore ε, si può sempre trovare una sfera che contenga il corpo conduttore al di là della quale la funzione V assume ovunque valori minori di ε.*

Ci troviamo di fronte al cosiddetto problema di Dirichlet esterno di cui volgiamo dimostrare ora l'unicità della soluzione.

Supponiamo di avere due soluzioni del problema $V_1(P)$ e $V_2(P)$

$\nabla^2 V_1 = 0$ e $\nabla^2 V_2 = 0$.

Consideriamo ora la funzione

$U(P) = V_1(P) - V_2(P)$

la quale verificherà in tutti della regione Ω l'equazione

$$\nabla^2 U = 0$$

Essendo la condizione al contorno sulla superficie Σ uguale per $V_1(P)$ e $V_2(P)$ si ha

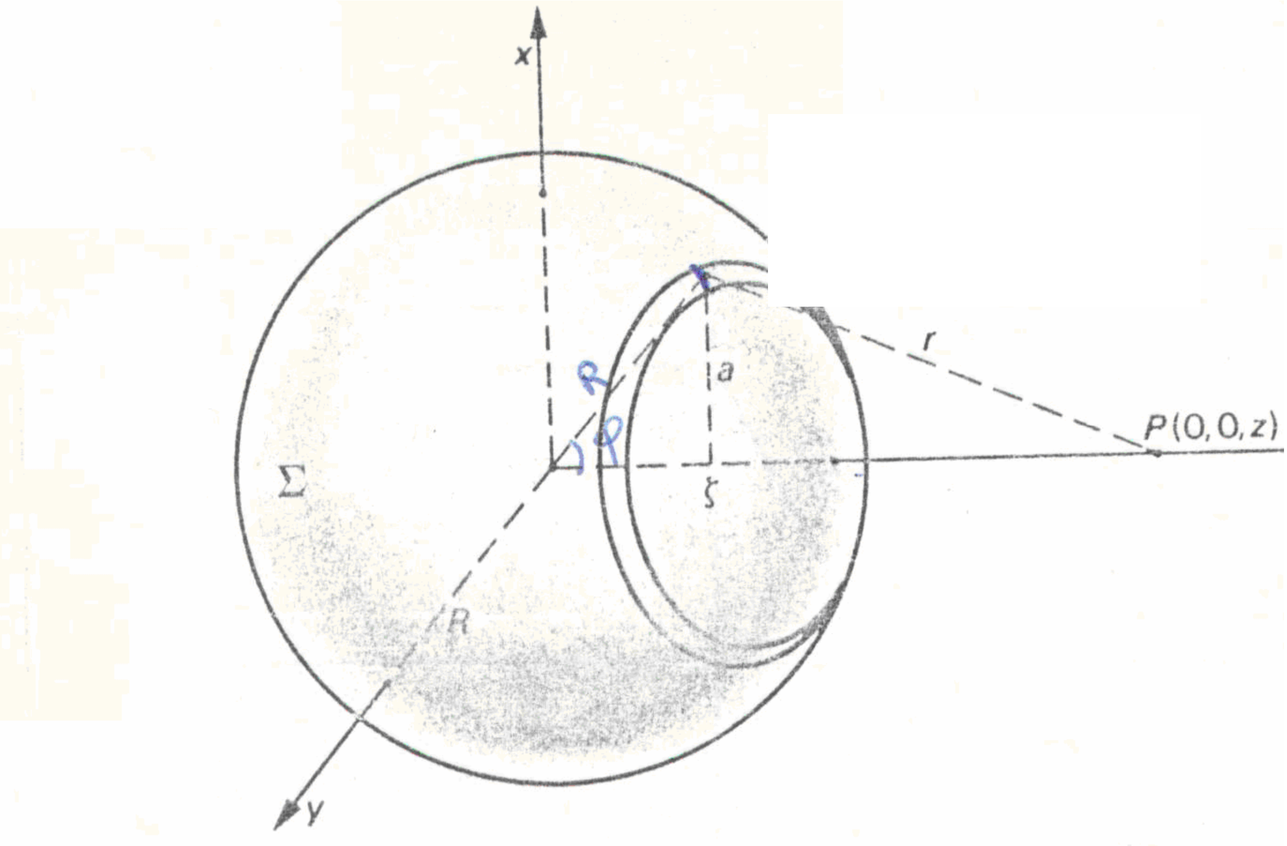
$$U\big|_\Sigma = V_2\big|_\Sigma - V_1\big|_\Sigma = 0$$

Inoltre

$$\lim_{P \to \infty} U(P) = \lim_{P \to \infty} V_1(P) - \lim_{P \to \infty} V_2(P) = 0$$

Quindi U è continua in Ω e Σ, assume valore nullo sulla frontiera e si annulla all'infinto e verifica la equazione di Laplace: invocando il teorema del massimo per le funzioni armoniche non ci resta che concludere che U sia identicamente nulla da cui l'unicità della soluzione per il potenziale.

Esempio della sfera conduttrice



Consideriamo una sfera conduttrice di raggio R centrata nell'origine del sistema di riferimento posta nel vuoto a cui sia conferita una carica Q. per motivi di simmetria possiamo già dire che V deve dipendere soltanto dalla distanza r dal centro della sfera.

L'equazione di Laplace in coordinate sferiche

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

diventa semplicemente

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

con A e B costanti arbitrarie.

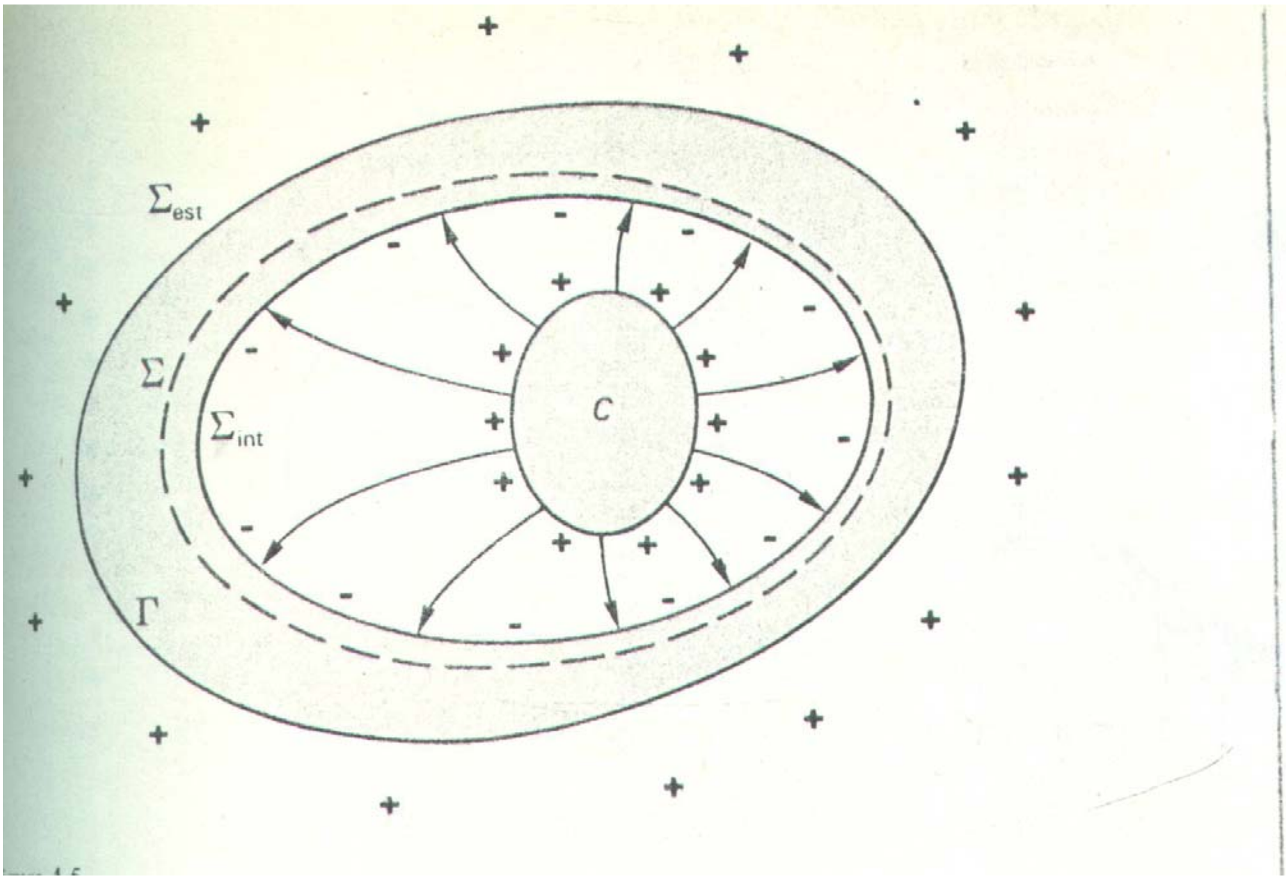
Per la condizione di regolarità all'infinito deve essere B = 0

$$V(r) = \frac{A}{r}$$

Sulla superficie deve poi essere

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{A}{R^2} \Rightarrow -\iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{A}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Rightarrow A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

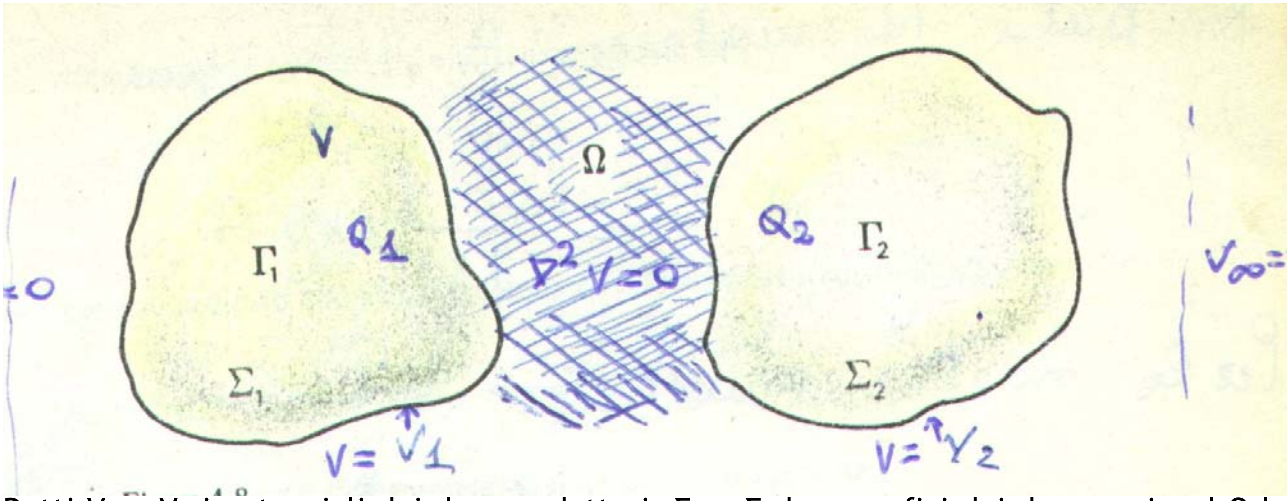
Schermi elettrostatici



Consideriamo un conduttore Γ dotato di cavità interna a cui comunichiamo una carica Q. Vogliamo ora dimostrare che la carica si distribuisce solo sulla superficie esterna. Consideriamo la funzione potenziale in tutta la regione delimitata dalla superficie interna. Per assenza di cariche in tale regione essa soddisfa l'equazione di laplace e deve assumere valori costanti sulla superficie interna. Si tratta di un problema di Dirichlet interno. Corrispondente ad un valore costante del potenziale sulla frontiera. Applicando il ragionamento fatto precedentemente si ha ancora una volta che il potenziale è costante all'interno della cavità e il campo elettrostatico è nullo. In particolare sarà nulla la componente normale del campo in tutti i punti della superficie interna , per cui la densità superficiale di carica sulla superficie interna deve essere nulla. In base a questo ragionamento possiamo dire che ogni distribuzione di carica all'esterno del conduttore non produce campo all'interno della cavità. Il conduttore cavo si comporta come uno schermo elettrostatico.

I condensatori

Un condensatore è un sistema fisico costituito da due conduttori detti armature affacciati e separati da un mezzo isolante , caricati in modo che la carica sull'uno sia uguale ed opposta a quella dell'altro. Questi dispositivi consentono di creare intensi campi elettrostatici regioni limitate e di immagazzinare notevoli energie elettrostatiche. Cominciamo considerando due corpi conduttori di forme e dimensioni generiche caricati con due cariche Q_1 e Q_2



Detti V_1 e V_2 i potenziali dei due conduttori, Σ_1 e Σ_2 le superfici dei due corpi ed Ω lo spazio esterno ai due copri il potenziale V dovrà essere continuo nello spazio e sulle due superfici, verificare l'equazione di Laplace in Ω, assumere i valori costanti V_1 e V_2 su Σ_1 e Σ_2 e annullarsi all'infinito. Dobbiamo dunque cercare la soluzione di un problema di Dirichlet esterno con frontiera multipla $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Consideriamo allora $V_{10}(P)$ soluzione del problema corrispondente alle condizioni al contorno

$$\begin{cases} V = 1 & su \quad \Sigma_1 \\ V = 0 & su \quad \Sigma_2 \end{cases}$$

e $V_{01}(P)$ soluzione del problema corrispondente alle condizioni al controno

$$\begin{cases} V = 0 & su \quad \Sigma_1 \\ V = 1 & su \quad \Sigma_2 \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione

$V(P)=V_1 * V_{10}(P)+V_2 * V_{01}(P)$

Questa funzione verifica l'equazione di Laplace, si annulla all'infinito,è continua in Ω U Σ_1 U Σ_2, assumere i valori costanti V_1 e V_2 su Σ_1 e Σ_2. Essa soddisfa dunque il nostro problema ma è nota se sono noti $V_{10}(P)$ e $V_{01}(P)$.

Considerate le cariche sui due corpi si ha

$$Q_1 = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\varepsilon_0 V_1 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS - \varepsilon_0 V_2 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS$$

$$Q2 = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\varepsilon_0 V_1 \iint_{\Sigma 2_1} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS - \varepsilon_0 V_2 \iint_{\Sigma 2} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS$$

Posto

$$C_{11} = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS \qquad C_{12} = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS$$

$$C_{21} = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma 2} \frac{\partial V_{10}}{\partial n} dS \qquad C_{22} = -\varepsilon_0 \iint_{\Sigma 2} \frac{\partial V_{01}}{\partial n} dS$$

Si ha dunque

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$
$$Q2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

o anche in forma matriciale

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$$

con l'introduzione dunque di una matrice di capacità del sistema i cui elementi dipendono soltanto dalla geometria del sistema. Si può dimostrare che la matrice è simmetrica con $C_{12}=C_{21}$. Consideriamo ora il caso particolare in cui i due conduttori siano caricati con cariche uguali ed opposte

$Q_1=-Q_2=Q$

Si ha allora

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = -Q2 = -(C_{21}V_1 + C_{22}V_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (C_{11} + C_{21})V_1 = -(C_{12} + C_{22})V_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{C_{12} + C_{22}}{C_{11} + C_{21}}$$

Eseguiamo poi le seguenti trasformazioni

$$V_1 = \frac{V_1}{V_2}V_2 = \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{1}{V_2}} = \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{1}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_2}} = \frac{V_1}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_2}V_2 = \frac{V_1}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)}$$

$$V_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_2}V_2 = \frac{V_2}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)} = \frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)}$$

sostituiamo tali espressioni in

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

e otteniamo

$$Q_1 = C_{11}\frac{V_1}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)} + C_{12}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)} \Rightarrow Q\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = (V_1 - V_2)\left(C_{11}\frac{V_1}{V_2} + C_{12}\right)$$

$$-Q = C_{21}\frac{V_1}{V_2}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)} + C_{22}\frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)} \Rightarrow -Q\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = (V_1 - V_2)\left(C_{12}\frac{V_1}{V_2} + C_{22}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$Q\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = (V_1 - V_2)\left(C_{11}\frac{V_1}{V_2} + C_{12}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q\left(-\frac{C_{12} + C_{22}}{C_{11} + C_{21}} - 1\right) = (V_1 - V_2)\left(-C_{11}\frac{C_{12} + C_{22}}{C_{11} + C_{21}} + C_{12}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q\left(-\frac{C_{12} + C_{22} + C_{11} + C_{21}}{C_{11} + C_{21}}\right) = (V_1 - V_2)\left(\frac{-C_{11}(C_{12} + C_{22}) + (C_{11} + C_{21})C_{12}}{C_{11} + C_{21}}\right) \Rightarrow$$

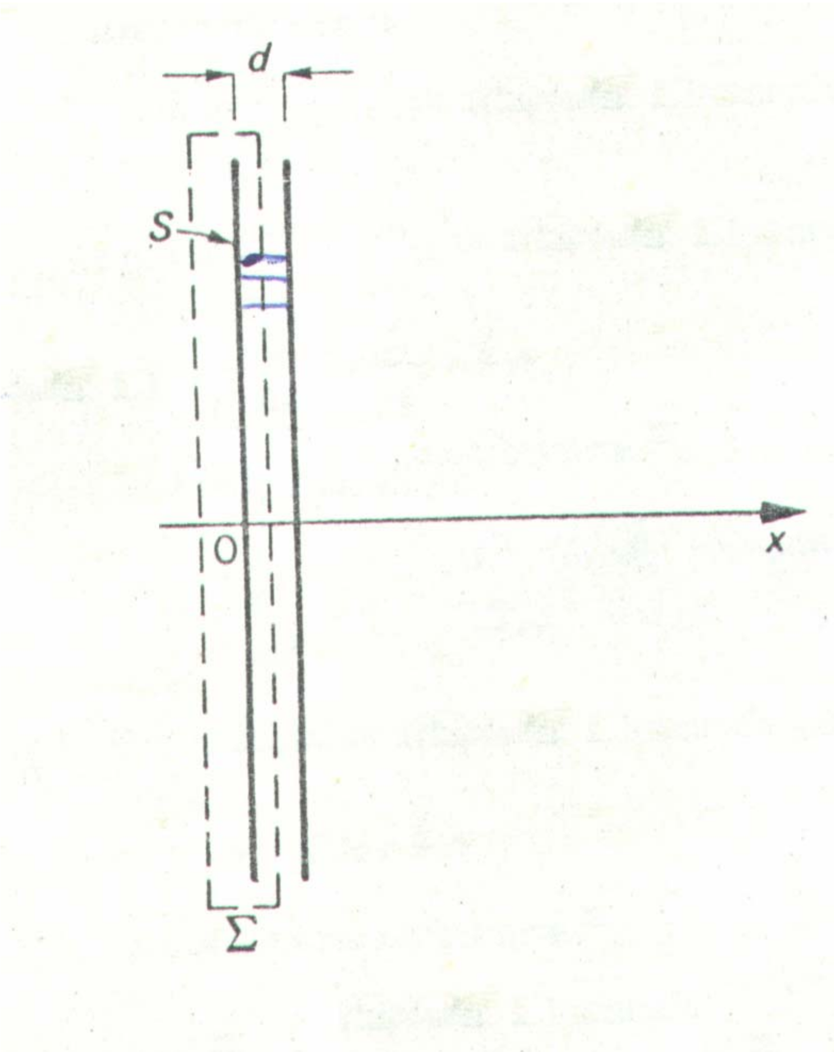
$$\Rightarrow Q = (V_1 - V_2)\frac{C_{11}(C_{12} + C_{22}) - (C_{11} + C_{21})C_{12}}{C_{12} + C_{22} + C_{11} + C_{21}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = (V_1 - V_2)\frac{C_{11}C_{12} + C_{11}C_{22} - C_{11}C_{12} - C_{21}C_{12}}{C_{12} + C_{22} + C_{11} + C_{21}} \Rightarrow Q = C(V_1 - V_2) \rightarrow dove$$

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12}}{C_{12} + C_{22} + C_{11} + C_{21}}$$

La capacità di un condensatore dipende, dunque, soltanto dalla geometria del sistema.

Il condensatore piano



Abbiamo un condensatore costituito da due armature piane e parallele di area S. separate da una distanza d. Se d è molto piccola rispetto alle dimensioni delle armature possiamo supporre le armature infinite. Considerato il sistema di riferimento di figura appare ovvio per la simmetria del sistema che l'equazione di Laplace si riduce a

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Quindi V(x)=Ax+B.

Applichiamo il teorema di Gauss alla superficie chiusa indicata in figura

$$Q = \varepsilon_0 \iint_\Sigma E \bullet n dS = -\varepsilon_0 \iint_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

Con le approssimazioni fatte di armature infinite $\frac{\partial V}{\partial n}$ è nulla fuori delle armature per cui

$$Q = -\varepsilon_0 AS$$

ma dalla soluzione dell'equazione di Laplace

V_1-V_2=-Ad

Per cui

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Condensatore cilindrico

Consideriamo un condensatore costituito da due cilindri conduttori coassiali a sezione circolare di lunghezza molto superiore ai raggi dei cilindri.

Per la simmetria del sistema l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

diventa

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\ V}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Per r diverso da 0 si ha allora

$$\left(r\frac{dV}{dr}\right) = K$$

con K costante arbitraria per cui l'integrale generale è

V=Klnr+A

Ora $Q_1 = \iint_{\Sigma_{\text{int}}} \sigma dS$ con, in base al teorema di Coulomb

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{\Sigma \text{int}} = -\varepsilon_0 \frac{K}{R\text{int}}$$

La quantità di carica per unità di lunghezza sarà

$$Q = 2\pi R\text{int}\, K \frac{\varepsilon_0}{R\text{int}} = 2\pi K\varepsilon_0$$

Mentre la differenza di potenziale sarà

$$\Delta V = Vest - V\text{int} = K \ln\frac{\text{Re}\,st}{R\text{int}} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\text{Re}\,st}{R\text{int}}}$$